Sistem linearnih diferencijalnih jednačina

Sistem linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku je sistem

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)
\end{aligned} \qquad \ldots(1)$$

pri čemu su $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$ f-je po promjenjivoj x.
Uvedimo oznake

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad Y' = \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}(x)]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Tada se sistem (1) može napisati u obliku

$$\frac{dY}{dx} = AY + B.$$

Ako je $b_j = 0$ (za $j = 1, 2, \ldots, n$) tada se dati sistem naziva homogen sistem

$$\frac{dY}{dx} = AY.$$

U lekcijama koje slijede mi ćemo razmatrati sisteme sa konstantnim koeficijentima. Ove sisteme možemo riješiti nekom od slijedećih metoda:

1. Metoda svođenja sistema na jednu difer. jednačinu višeg reda
2. Ojlerova metoda za rješavanje homogenog sistema
3. Metod varijacije konstanti
4. Metod prvih integrala sistema
5. Metod nalaženjem partikularnog rješenja
6. Primjenom Laplasovih transformacija
7. Korištenjem spektralnih projektora iz Linearne algebre

U lekcijama koje slijede detaljno ćemo obraditi prvu, drugu, treću i petu metodu.

Svođenje sistema na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda

U MATEMATICI II, smo razmatrali diferencijalne jednačine koje uključuju samo dvije varijable. U ovoj lekciji razmatraćemo diferencijalne jednačine koje uključuju više od dvije varijable. Ako je samo jedna varijabla linearno nezavisna, data jednačina je obična diferencijalna jednačina; ako je više varijabli nezavisno, jednačina se naziva parcijalna diferencijalna jednačina. U ovoj lekciji ćemo razmatrati sistem običnih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima kao što su

$$(A)\begin{cases} 2\dot{x}+\dot{y}-4x-y=e^t \\ \dot{x}+3x+y=0 \end{cases} \iff (A')\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-4x-y=e^t \\ \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff (A'')\begin{cases} 2x'(t)+y'(t)-4x(t)-y(t)=e^t \\ x'(t)+3x(t)+y(t)=0 \end{cases} \iff (A''')\begin{cases} (2D-4)x+(D-1)y=e^t \\ (D+3)x+y=0 \end{cases}$$

gdje je $D=\dfrac{d}{dt}$.

i

$$(B)\begin{cases} \dot{x}+\dot{y}+y=1 \\ \dot{x}-\dot{z}+2x+z=1 \\ \dot{y}+\dot{z}+y+2z=0 \end{cases} \iff (B')\begin{cases} Dx+(D+1)y=1 \\ (D+2)x-(D-1)z=1 \\ (D+1)y+(D+2)z=0 \end{cases}$$

U procesu rješavanja sistema diferencijalnih jednačina, skoro uvijek ćemo naići na linearnu diferencijalnu jednačinu višeg reda sa konstantnim koeficijentima čiji proceš rješavanja nam je poznat iz Matematike II. Da bi smo ponovili kako riješiti ove diferencijalne jednačine, Metodom neodređenih koeficijenata ćemo riješiti sljedeće primjere:

(a) $x'' + x = -e^t$ gdje je $x = x(t)$.

(b) $(D^2+1)y = 4e^t$ (gdje je $D = \frac{d}{dt}$)

(c) $x''(t) + 4x'(t) - 5x(t) = -6e^{2t}$

(d) $y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = 14 - 30t$

(e) $(D^2 - 4D + 3)x = -2e^t - 3e^{4t}$ (gdje je $D = \frac{d}{dt}$)

(f) $(D-1)(D-2)(D-3)y = 0$ (gdje je $D = \frac{d}{dt}$).

Ove jednačine ćemo riješiti na času (vidi DODATAK u ovoj svesci) a ovdje ćemo samo napisati njihova rješenja:

a) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2} e^t$

b) $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2e^t$

c) $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t}$

d) $y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^t + 6t + 2$

e) $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^t - e^{4t}$

f) $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$

OSNOVNA PROCEDURA za rješavanje sistema od n običnih diferencijalnih jednačina po n zavisnih varijabli sastoji se u dobijanju, pomoću diferenciranja datih jednačina, skupa u kojem se sve osim jedne zavisne varijable, recimo x, mogu eliminisati. Jednačina koja se dobije kao rezultat ove eliminacije se tada riješi po toj varijabli x. Svaku od zavisnih varijabli se dobije na sličan način.

$\boxed{\text{Primjer}}$ Posmatrajmo sistem

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \quad \ldots (I)$$

$$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \quad \ldots (II)$$

Rješenje 1:

Prvo primjetimo da opšte rješenje $x=x(t)$, $y=y(t)$ ovog sistema također zadovoljava

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0 \quad \ldots (III)$$

što smo dobili diferencirajući jednačinu (II). Štaviše, množeći (I) sa (−1), (II) sa (−1), (III) sa 1 i sabirajući ih dobijamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -e^t \quad \ldots (IV)$$

što je također zadovoljeno sa $x=x(t)$, $y=y(t)$. Ova zadnja diferencijalna jednačina, koja ne sadrži ni y ni njegove izvode, se može lagano riješiti; time

KAKO?

$$x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t$$

Da bi odredili Y možemo postupiti na sličan način, tj. diferencirati (I) da bi dobili

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = e^t$$

i onda razmatrati jednačine (I), (II), (III) eliminisati x i njegove izvode. Međutim mnogo jednostavnija procedura je sljedeća. Iz (II) imamo

$$y = -\frac{dx}{dt} - 3x = -\left(-C_1\sin t + C_2\cos t - \frac{1}{2}t\right) - 3\left(C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t\right)$$

$$= (C_1 - 3C_2)\sin t - (3C_1 + C_2)\cos t + 2e^t$$

Prema tome

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t \\ y(t) = (C_1 - 3C_2)\sin t - (3C_1 + C_2)\cos t + 2e^t \end{cases}$$

je opšte rješenje datog sistema

Kada se jednačine napišu u D oznaci $\left(D = \frac{d}{dt}\right)$, postoji velika sličnost u proceduri koji ćemo koristiti u rješenju 2 i koju smo koristili u metodi rješavanju sistema od n jednačina po n nepoznatih. Ovo dugujemo činjenici da kada su u pitanju jednačine sa konstantnim koeficijentima, operator D možemo tumačiti kao varijablu (slovo).

Rješenje 2:

Dati sistem
$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-4x-y=e^t$$
$$\frac{dx}{dt}+3x+y=0$$

možemo napisati u obliku
$$2(D-2)x+(D-1)y=e^t \quad \ldots(I)$$
$$(D+3)x+y=0 \quad \ldots(II)$$

gdje je $D=\frac{d}{dt}$.

Sada možemo nastaviti kao da imamo dvije jednačine sa dvije nepoznate x i y, množeći (II) sa $(D-1)$. Tačnije na (II) mi primjenjujemo diferencijalni operator $D-1=\left(\frac{d}{dt}-1\right)$ i dobijamo
$$(D-1)(D+3)x+(D-1)y=0 \quad \ldots(*).$$

Ako oduzmemo (I) od (*) imamo
$$\left((D-1)(D+3)-2(D-2)\right)x=-e^t \quad ili \quad (D^2+1)x=-e^t.$$

Sada ovo je isto kao i (IV) iz rješenja 1 kao što smo i očekivali, zato što primjenjujući na (II) operator $D-1$ je ekvivalentno diferencirajući (II) i dodavajući mu (-1)(II) kao u prethodnom rješenju. Opšte rješenje se dobije na potpuno isti način kao u rješenju 1.

Rješenje 3:

Također možemo odrediti rješenje koristeći determinante (prisjetimo se gradiva iz Matematike 1 - rješavanje sistema linearnih jednačina metodom determinanti). Iz sistema

$$\begin{aligned} 2(D-2)x + (D-1)y &= e^t \\ (D+3)x + \quad y &= 0 \end{aligned}$$

imamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{i} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}}$$

ili $(D^2+1)x = -e^t$ i $(D^2+1)y = 4e^t$

Prva jednačina je ista kao i (IV) iznad, a drugu smo dobili u proceduri koju smo odbacili u rješenju 1. Sada ćemo pokazati zašto smo je odbacili. Kada se obije jednačine riješe (KAKO? - npr. metoda neodređenih koeficijenata) imamo

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2}e^t \quad \dots (VI)$$

$$y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t + 2e^t \quad \dots (VII)$$

Prema rješenju 1 znamo da (VI) i (VII) sadrže previše proizvoljnih konstanti. Da bi ih eliminisali uvrstiti ćemo ih u (II) i dobiti

$$(C_2+3C_1+C_3)\cos t+(3C_2-C_1+C_4)\sin t=0$$

za svaku vrijednost od t. Prema tome

$$C_3=-(3C_1+C_2) \quad i \quad C_4=C_1-3C_2$$

kada se ove vrijednosti zamjene u (VI) i (VII) dobićemo isto opšte rješenje koje smo već odredili ranije.

<u>BROJ NEZAVISNIH PROIZVOLJNIH KONSTANTI</u> koje se pojavljuju u opštem rješenju sistema

$$f_1(D)x+g_1(D)y=h_1(t)$$
$$f_2(D)x+g_2(D)y=h_2(t)$$

je jednak stepenu u D determinante $\Delta=\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$

što vrijedi ako Δ nije identički jednaka nuli. Ako je $\Delta\equiv 0$ sistem je zavisan; takve sisteme mi nećemo razmatrati ovdje.

Za dati sistem (A), $\Delta=\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}=-(D^2+1)$

Stepen 2 u D se slaže sa brojem proizvoljnih konstanti koje se pojavljuju u opštem rješenju.

Ista teorema se može proširiti za slučaj kada imamo n jednačina sa n nezavisnih varijabli.

Pokazati da je operator $(D+1)(D+3)$ isti kao i D^2+4D+3. $\left(D=\frac{d}{dt}\right)$.

Rj.

Za dva puta diferencijabilnu f-ju $y(t)$ imamo

$$y'(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}y=Dy$$

(simbol D koristimo umjesto $\frac{d}{dt}$).

$$(D+1)(D+3)[y]=(D+1)\Big((D+3)[y]\Big)=(D+1)[y'+3y]$$

$$=D[y'+3y]+1[y'+3y]=(y''+3y')+(y'+3y)$$

$$=y''+4y'+3y=(D^2+4D+3)[y].$$

Prema tome $(D+1)(D+3)=D^2+4D+3$.

Pokazati da operator $(D+3t)D$ nije isti kao i $D(D+3t)$.

Rj.

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}y = Dy,$$ simbol D koristimo umjesto $\frac{d}{dt}$.

Neka je $y(t)$ dva puta diferencijabilna f-ja

$$(D+3t)D[y] = (D+3t)[y'] = y'' + 3ty'$$

$$D(D+3t)[y] = D[y' + 3ty] = y'' + 3y + 3ty'$$

Prema tome operatori nisu isti.

Napomena: Kako koeficijent $3t$ nije konstanta, on prekida vezu diferencijalnog operatora D sa f-jom $y(t)$. Međutim dokle god imamo izraze oblika $aD^2 + bD + c$ gdje su a, b i c konstante, za "algebru" diferencijalnih operatora vrijede ista pravila kao za algebru polinoma.

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} + \dot{y} = x + 2t + 1$$
$$2\dot{x} + 2\dot{y} = -x + t$$

Rj. Prvo napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x + \frac{d}{dt}y = x + 2t + 1$$
$$2\frac{d}{dt}x + 2\frac{d}{dt}y = -x + t$$

---

uvedimo oznaku $D = \frac{d}{dt}$

$$(D-1)[x] + D[y] = 2t + 1 \quad \ldots(I)$$
$$(2D+1)[x] + 2D[y] = t \quad \ldots(II)$$

Eliminišimo f-ju y:

$(II) - 2\cdot(I)$: $\big((2D+1) - (2D-2)\big)[x] = -3t - 2$

$$3x = -3t - 2 \quad /:3$$

$$x = -t - \frac{2}{3}$$

$$(D-1)[x] = -1 + t + \frac{2}{3} = t - \frac{1}{3} \overset{(I)}{\Longrightarrow} y' = t + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + C_1$$

Rješenje sistema je
$$\begin{cases} x(t) = -t - \frac{2}{3} \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + C_1 \end{cases}$$

Kako je $\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix}$ stepena 1 po D to postoji samo jedna proizvoljna konstanta.

(#) Riješiti sistem
$$\dot{x} = -2x - 3y$$
$$\dot{y} = -3x - 2y + 2e^{2t}$$

Rj. Napišimo sistem u operator označama

$$\frac{d}{dt}x = -2x - 3y$$
$$\frac{d}{dt}y = -3x - 2y + 2e^{2t}$$

Ako uvedemo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ imamo

$$(D+2)x + 3y = 0 \qquad \ldots(I) \qquad /(D+2)$$
$$3x + (D+2)y = 2e^{2t} \qquad \ldots(II) \qquad /3$$

Riješimo se y-na:

$$(D+2)^2 x + 3(D+2)y = 0$$
$$- \quad 9x + 3(D+2)y = 6e^{2t}$$

$$(D^2 + 4D - 5)x = -6e^{2t} \qquad \ldots(III)$$

Jednačina (III) je linearna jednačina drugog reda po x sa konstantnim koeficijentima - njeno opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata.

$$x = x_h + x_p$$

kar. jedn. $\quad \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_h = C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t}$$

$x_p = Ae^{2t}$

$x_p' = 2Ae^{2t} \qquad x_p'' + 4x_p' - 5x_p = (4A + 8A - 5A)e^{2t} = -6e^{2t}$

$x_p'' = 4Ae^{2t} \qquad 7A = -6 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{6}{7}$

$$x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t}$$

Prva jednačina iz sistema je $\dot{x} = -2x - 3y$ tj.

$$-3y = \dot{x} + 2x \quad / \cdot (-3)$$

$$y = -\frac{1}{3} x' - \frac{2}{3} x$$

$$y = -\frac{1}{3}\left(C_1 e^{t} - 5C_2 e^{-5t} - \frac{12}{7} e^{2t} \right) - \frac{2}{3} C_1 e^{t} - \frac{2}{3} C_2 e^{-5t} + \frac{4}{7} e^{2t}$$

$$y = -C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t} + \frac{8}{7} e^{2t}$$

Rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t} \\ y(t) = -C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t} + \frac{8}{7} e^{2t} \end{cases}$$

(#) Riješiti sistem $x'(t) = 3x(t) - 4y(t) + 1$

$y'(t) = 4x(t) - 7y(t) + 10t$.

Rj. Uvedimo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ i napišimo sistem u operator oznakama

$$x' = 3x - 4y + 1$$
$$y' = 4x - 7y + 10t$$

$$x' - 3x + 4y = 1$$
$$-4x + y' + 7y = 10t$$

$$(D-3)[x] + 4y = 1 \quad \ldots(I)$$
$$-4x + (D+7)[y] = 10t \quad \ldots(II)$$

Eliminišimo f-ju $x(t)$ iz sistema

$4\cdot(I)$: $\quad 4(D-3)[x] + 16y = 4$

$(D-3)\cdot(II)$: $\quad + \quad (D-3)\cdot(-4)[x] + (D-3)(D+7)[y] = 10(D-3)[t]$

$$(16 + (D-3)(D+7))[y] = \underbrace{4 + (D-3)[10t]}_{4+10-30t}$$

$$(D^2 + 4D - 5)[y] = 14 - 30t \quad \ldots(III)$$

Jednačina (III) je linearna jednačina drugog reda po y sa konstantnim koeficijentima - opšte rješenje je oblika $y = y_h + y_p$ (METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA)

kar. jedn. $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{t}$

$$\left.\begin{array}{l} y_p = At + B \\ y_p' = A, \quad y_p'' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_p'' + 4y_p' - 5y_p = 4A - 5At - 5B = 14 - 30t$$

$-5A=-30$
$4A-5B=14$

$A=6$
$B=2$

Opšte rješenje jednačine (III) je $y(t)=C_1e^{-5t}+C_2e^{t}+6t+2$ ...(*)

F-ju $x(t)$ možemo odrediti na dva načina

I način

Vratimo se u početni sistem i eliminišimo $y(t)$

$$x' = 3x-4y+1$$
$$y' = 4x-7y+10t$$

$$(D-3)[x]+4y=1 \quad \text{...(IV)}$$
$$-4x+(D+7)[y]=10t \quad \text{...(V)}$$

$$(D+7)\cdot(IV): \quad (D+7)(D-3)[x]+4(D+7)[y]=(D+7)[1]$$
$$(-4)\cdot(V): \quad 16x-4(D+7)[y]=-40t$$

$$\left(16+(D+7)(D-3)\right)[x] = 7-40t$$
$$(D^2+4D-5)[x] = 7-40t \quad \text{...(VI)}$$

Jednačina (VI) je linearna jednačina drugog reda po x sa konstantnim koeficijentima - njeno rješenje možemo odrediti metodom neodređenih koeficijenata $y=y_h+y_p$

$\lambda^2+4\lambda-5=0$
$(\lambda+5)(\lambda-1)=0 \Rightarrow y_h=K_1e^{-5t}+K_2e^{t}$

$y_p=At+B$
$y_p'=A, \ y_p''=0 \ \ldots$ $A=8$, $B=5$

Opšte rješenje jednačine (VI) je

$$x(t)=K_1e^{-5t}+K_2e^{t}+8t+5 \quad \text{...(**)}$$

gdje su K_1 i K_2 proizvoljne konstante (koje ne moraju biti iste kao C_1 i C_2).

Kako u sistemu imamo dvije jednačine prvog reda, razumno je očekivati da njegovo rješenje uključuje samo dvije proizvoljne konstante. Time, četri konstante C_1, C_2, K_1 i K_2 nisu nezavisne. Da bi odredili njihovu međusobnu relaciju, zamjenićemo izraze za $x(t)$ i $y(t)$ date u (*) i (**) u jednu od jednačina iz sistema, recimo u prvu.

$$x'(t) = 3x(t) - 4y(t) + 1$$

$$(**) \Rightarrow \quad x(t) = K_1 e^{-5t} + K_2 e^{t} + 8t + 5 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x'(t) = -5K_1 e^{-5t} + K_2 e^{t} + 8$$

pa imamo

$$\underline{-5K_1 e^{-5t}} + \underline{\underline{K_2 e^{t}}} + 8 = \underline{3K_1 e^{-5t}} + \underline{\underline{3K_2 e^{t}}} + \cancel{24t} + 15 - \underline{4C_1 e^{-5t}} - \underline{\underline{4C_2 e^{t}}} - \cancel{24t} - 8 + 1$$

$$\Rightarrow \quad (4C_1 - 8K_1)e^{-5t} + (4C_2 - 2K_2)e^{t} = 0$$

Kako su e^{t} i e^{-5t} linearno nezavisne f-je na bilo kojem intervalu, zadnja jednakost vrijedi za sve t samo ako

$$4C_1 - 8K_1 = 0 \quad i \quad 4C_2 - 2K_2 = 0$$

tj.

$$K_1 = \frac{1}{2}C_1 \quad i \quad K_2 = 2C_2$$

Rješenje datog sistema je

$$x(t) = \frac{1}{2}C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^{t} + 8t + 5$$

$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{t} + 6t + 2$$

traženo opšte rješenje

II način

Puno jednostavnija metoda za određivanje $x(t)$ jednom kada je $y(t)$ poznato je da iskoristimo sistem i da dobijemo jednačinu za $x(t)$ po članovima od $y(t)$ i $y'(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 4y(t) + 1 \\ y'(t) &= 4x(t) - 7y(t) + 10t \end{aligned} \qquad \dots (1)$$

$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{t} + 6t + 2 \qquad \dots (2)$$

$$(1) \Rightarrow \quad 4x(t) = y'(t) + 7y(t) - 10t \quad /:4$$

$$x(t) = \frac{1}{4} y'(t) + \frac{7}{4} y(t) - \frac{5}{2} t \qquad \dots (3)$$

Uvrstimo (2) u (3)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}\left(-5C_1 e^{-5t} + C_2 e^{t} + 6\right) + \frac{7}{4}\left(C_1 e^{-5t} + C_2 e^{t} + 6t + 2\right) - \frac{5}{2}t \\ &= \frac{1}{2} C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^{t} + 8t + 5 \end{aligned}$$

Pa je opšte rješenje sistema

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^{t} + 8t + 5 \\ y(t) &= C_1 e^{-5t} + C_2 e^{t} + 6t + 2 \end{aligned}$$

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = 2x + y + 2e^t$$
$$\dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti na dva načina

<u>I način</u>

Napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{dx}{dt} - 2x - y = 2e^t$$
$$\frac{dy}{dt} - 2y - x = -3e^{4t}$$

uvedimo oznaku $\frac{d}{dt} = D$

$$(D-2)x - y = 2e^t \quad /\cdot(D-2)$$
$$-x + (D-2)y = -3e^{4t}$$

$(D-2)(2e^t) = 2e^t - 4e^t = -2e^t$

$$(D-2)^2 x - (D-2)y = -2e^t$$
$$+\quad -x + (D-2)y = -3e^{4t}$$

$$(D^2 - 4D + 3)x = -2e^t - 3e^{4t} \quad \ldots (*)$$

Dobili smo linearnu jednačinu drugog reda po x sa konstantnim koeficijentima - njezino opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata.

$x = x_p + x_h$ - opšte rješenje

x_h - opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine

x_p - neko partikularno rješenje nehomogene jednačine karakteristična jednačina $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$$(\lambda-3)(\lambda-1)=0$$

$$x_h = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

Primjetimo da se izraz e^t nalazi u homogenom rješenju pa imamo

$$x_p = A t e^t + B e^t + C e^{4t}$$

$$\dot{x}_p = A e^t + A t e^t + B e^t + 4 C e^{4t} = A t e^t + (A+B) e^t + 4 C e^{4t}$$
$$\ddot{x}_p = A e^t + A t e^t + (A+B) e^t + 16 C e^{4t} = A t e^t + (2A+B) e^t + 16 C e^{4t}$$

Kako je

$$\ddot{x}_p = A t e^t + (2A+B) e^t + 16 C e^{4t}$$
$$-4\dot{x}_p = -4 A t e^t + (-4A-4B) e^t - 16 C e^{4t}$$
$$3 x_p = 3 A t e^t + 3 B e^t + 3 C e^{4t}$$

to je

$$\ddot{x}_p - 4\dot{x}_p + 3x_p = (-2A) e^t + 3 C e^{4t}$$

A iz $(*)$ $\Rightarrow$ $\ddot{x}_p - 4\dot{x}_p + 3x_p = -2 e^t - 3 e^{4t}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $A = 1$

Konstanta B je proizvoljna, ali kako izraz $c_1 e^t$ već imamo u homogenom rješenju to ćemo $B e^t$ izostaviti.

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + t e^t - e^{4t} \quad \ldots (**)$$

Prva jednačina iz sistema je $\dot{x} = 2x + y + 2e^t$ pa je

$$y = \dot{x} - 2x + 2e^t$$

Prema $(**)$ imamo

$$\dot{x} = \underline{c_1e^t} + \underline{\underline{3c_2e^{3t}}} + \underline{e^t} + \underline{te^t} - 4e^{4t}$$

$$-2x = \underline{-2c_1e^t} \underline{\underline{-2c_2e^{3t}}} \underline{-2te^t} + 2e^{4t}$$

pa je

$$y(t) = (-c_1 - t - 1)e^t + c_2e^{3t} - 2e^{4t}$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + t)e^t + c_2e^{3t} - e^{4t} \\ y(t) = (-c_1 - t - 1)e^t + c_2e^{3t} - 2e^{4t} \end{cases}$$

<u>II način</u>

$$\dot{x} = 2x + y + 2e^t \quad \dots (I)$$

$$\dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \quad \dots (II)$$

Iz prve jednačine ćemo izraziti y i uvrstiti je u drugu jednačinu

$$y = \dot{x} - 2x - 2e^t \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} - 2\dot{x} - 2e^t$$

Zadnje dvije jednakosti uvrstimo u (II)

$$\ddot{x} \underline{-2\dot{x}} - 2e^t = x + 2(\dot{x} - 2x - 2e^t) - 3e^{4t}$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = -2e^t - 3e^{4t}$$

dobili smo linearnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima (vidi (*) iz I načina)

Ovu jednačinu smo već rješili (vidi I način): $x(t) = c_1e^t + c_2e^{3t} + te^t - e^{4t}$

Ostatak rješenja je potpuno isti k prvom načinu.

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\ddot{x} = 2x + 3y + e^{2t}$$
$$\ddot{y} = -x - 2y$$

tako da partikularno rješenje zadovoljava uslove $x = y = 1$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$ kada je $t = 0$.

Rj.

$$\ddot{x} = 2x + 3y + e^{2t} \quad \ldots (I) \quad \Big/ \frac{d^2}{dt^2}$$
$$\ddot{y} = -x - 2y \quad \ldots (II)$$

$$\overset{....}{x} = 2\ddot{x} + 3\ddot{y} + 4e^{t} \quad \ldots (III)$$
$$\ddot{y} = -x - 2y$$

Uvrstimo (I) i (II) u (III):

$$\overset{....}{x} = 2(2x + 3y + e^{2t}) + 3(-x - 2y) + 4e^{t}$$
$$\overset{....}{x} = x + 6e^{2t}$$

Kako je $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ako uvedemo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ imamo

$$(D^4 - 1)x = 6e^{2t}$$

ovo je linear. jednač. četvrtog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$x = x_h + x_p$

karakt. jedn. $\lambda^4 - 1 = 0$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

$$x_h = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

Primetimo da se izraz e^{2t} ne pojavljuje u homogenom rešenju.

$$x_p = Ae^{2t}$$

$$\dot{x}_p = 2Ae^{2t}$$

$$\ddot{x}_p = 4Ae^{2t}$$

$$\dddot{x}_p = 8Ae^{2t}$$

$$\ddddot{x}_p = 16Ae^{2t}$$

$$\ddddot{x}_p - x_p = 6e^{2t}$$

$$15Ae^{2t} = 6e^{2t} \quad /:3$$

$$A = \frac{2}{5}$$

$$x(t) = C_1e^{t} + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t + \frac{2}{5}e^{2t}$$

Sad, kako je

$$\dot{x} = C_1e^{t} - C_2e^{-t} - C_3\sin t + C_4\cos t + \frac{4}{5}e^{2t}$$

$$\ddot{x} = C_1e^{t} + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t + \frac{8}{5}e^{2t}$$

i prema (1) $\quad 3y = \ddot{x} - 2x - e^{2t}$ $\quad$ imamo

$$y(t) = -\frac{1}{3}(C_1e^{t} + C_2e^{-t}) - (C_3\cos t + C_4\sin t) - \frac{1}{15}e^{2t}$$

Primetimo da smo x mogli odrediti i uz pomoć determinanti. Ako sistem napišemo u operator oznakama

$$(D^2-2)x - 3y = e^{2t}$$

$$x + (D^2+2)y = 0$$

$$\begin{vmatrix} D^2-2 & -3 \\ 1 & D^2+2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^{2t} & 3 \\ 0 & D^2+2 \end{vmatrix} \quad \text{ili} \quad (D^4-1)x = 6e^{2t}$$

...

Kada je $t=0$,

$$x = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{2}{5} = 1$$

$$\dot{x} = C_1 - C_2 + C_4 + \frac{4}{5} = 0$$

$$y = -\frac{1}{3}(C_1 + C_2) - C_3 - \frac{1}{15} = 1$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{3}(C_1 - C_2) - C_4 - \frac{2}{15} = 0$$

Imamo četri linearne jednačine sa četri nepoznate C_1, C_2, C_3 i C_4. Njihovo rješenje je

$$C_1 = \frac{3}{4}, \quad C_2 = \frac{7}{4}, \quad C_3 = \frac{-19}{10}, \quad C_4 = \frac{1}{5}$$

i traženo partikularno rješenje je

$$x = \frac{1}{4}(3e^{t} + 7e^{-t}) - \frac{1}{10}(19\cos t - 2\sin t) + \frac{2}{5}e^{2t}$$

$$y = -\frac{1}{12}(3e^{t} + 7e^{-t}) + \frac{1}{10}(19\cos t - 2\sin t) - \frac{1}{15}e^{2t}$$

(#) Odrediti opšte rješenje sistema

$$x''(t)+y'(t)-x(t)+y(t)=-1$$
$$x'(t)+y'(t)-x(t)=t^2 .$$

Rj. Prvo napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-x+y=-1$$
$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-x=t^2$$

Ako uvedemo oznaku $D=\frac{d}{dt}$ sistem postaje

$$(D^2-1)[x]+(D+1)[y]=-1 \qquad \ldots(I)$$
$$(D-1)[x]+D[y]=t^2 \qquad \ldots(II)$$

Rješimo se y-na:

$$D\cdot(I):\quad D(D^2-1)[x]+D(D+1)[y]=D[-1]$$
$$(D+1)(II):\quad -\;(D+1)(D-1)[x]+D(D+1)[y]=(D+1)[t^2]$$

$$\Big(\underbrace{D(D^2-1)}_{(D-1)(D+1)}-(D+1)(D-1)\Big)[x]=0-(2t+t^2)$$

$$(D-1)(D+1)(D-1)[x]=-2t-t^2$$

$$(D-1)^2(D+1)[x]=-t^2-2t \qquad \ldots(III)$$

Jednačina (III) je linearna jednačina trećeg reda po x sa konstantnim koeficijentima - opšte rješenje možemo odrediti metodom neodređenih koeficijenata.

$$x=x_h+x_p$$

$(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$ karakter. jednačina

$$x_h = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-t}$$

$x_p = At^2 + Bt + C$

$x_p' = 2At + B$

$x_p'' = 2A$

$x_p''' = 0$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$x_p''' - x_p'' - x_p' + x_p = -t^2 - 2t$$

$$2 - 2A - (2At + B) + (At^2 + Bt + C) = -t^2 - 2t$$

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B - 2A &= -2 \\ -2A - B + C &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= -4 \\ C &= -6 \end{aligned}$$

$x_p(t) = -t^2 - 4t - 6$

Opšte rješenje jednačine (III) je

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-t} - t^2 - 4t - 6 \quad \dots (*)$$

Da bi odredili $y(t)$ prvo ćemo, ako je moguće, iskoristiti sistem i izvesti jednačinu koja uključuje $y(t)$ ali ne i njezin izvod. Poslije toga ćemo zamijeniti dobijeni izraz za $x(t)$ u tu jednačinu i dobiti formulu za $y(t)$

$$(D^2 - 1)[x] + (D+1)[y] = -1 \quad \dots (IV)$$

$$(D-1)[x] + D[y] = t^2 \quad \dots (V)$$

$(IV) - (V)$: $\quad (D^2 - D)[x] + y = -1 - t^2$

$$y = (D - D^2)[x] - 1 - t^2$$

zamjenom

$(*) \Rightarrow \quad y = C_1 e^t + C_2(e^t + te^t) - C_3 e^{-t} - 2t - 4 - (C_1 e^t + C_2(te^t + 2e^t) + C_3 e^{-t} - 2) - 1 - t^2$

Prema tome

$$y(t) = -C_2 e^t - 2C_3 e^{-t} - t^2 - 2t - 3 \quad \dots (**)$$

$(*)$ i $(**)$ su opšte rješenje datog sistema

(#) Riješiti sistem

$$\dot{x} + 2\dot{y} = 3x - 4y + 2\sin t$$
$$2\dot{x} + \dot{y} = -2x + y + \cos t$$

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x - 3x + 2\frac{d}{dt}y + 4y = 2\sin t$$
$$2\frac{d}{dt}x + 2x + \frac{d}{dt}y - y = \cos t$$

uvedimo oznaku $\frac{d}{dt} = D$

rješimo se y-na

$$(D-3)x + 2(D+2)y = 2\sin t \quad /\cdot(D-1)$$
$$2(D+1)x + (D-1)y = \cos t \quad /\, 2(D+2)$$

$$(D-1)(D-3)x + 2(D-1)(D+2)y = \underbrace{2(D-1)\sin t}_{= 2(\cos t - \sin t)}$$
$$4(D+1)(D+2)x + 2(D-1)(D+2)y = \underbrace{2(D+2)\cos t}_{= 2(-\sin t + 2\cos t)}$$

$-$

$$\left(D^2 - 4D + 3 - 4(D^2 + 3D + 2)\right)x = 2\cos t - 2\sin t - (-2\sin t + 4\cos t)$$
$$(-3D^2 - 16D - 5)x = -2\cos t \quad /\cdot(-1)$$
$$(3D^2 + 16D + 5)x = 2\cos t \quad \ldots (1)$$

Jednačina (1) je linearna jednačina drugog reda po x-u sa sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata.

$x = x_h + x_p$

kar. jedn. $3\lambda^2 + 16\lambda + 5 = 0$ $\quad D = 196$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{-16 \pm 14}{6}$ $\quad \lambda_1 = \frac{-30}{6} = -5$, $\quad \lambda_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$$x_h = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}}$$

$$x_p = A\cos t + B\sin t$$

$$3x_p'' + 16x_p' + 5x_p = 2\cos t$$

$$x_p' = -A\sin t + B\cos t$$

$$x_p'' = -A\cos t - B\sin t$$

$$3x_p'' = -3A\cos t - 3B\sin t$$

$$16x_p' = 16B\cos t - 16A\sin t$$

$$5x_p = 5A\cos t + 5B\sin t$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 2A + 16B &= 2 \\ -16A + 2B &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + 8B &= 1 \\ -8A + B &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad B = 8A$$

$$A + 64A = 1$$

$$65A = 1$$

$$A = \frac{1}{65} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{8}{65}$$

$$x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{8}{65}\sin t + \frac{1}{65}\cos t \qquad \ldots (*)$$

Vratimo se u početni sistem i riješimo se $\dot{y}$

$$\dot{x} + 2\dot{y} = 3x - 4y + 2\sin t \qquad (II)$$

$$2\dot{x} + \dot{y} = -2x + y + \cos t \qquad (III) \qquad / \cdot (-2)$$

Rješenje ~~sustava~~ sistema su izrazi $x(t)$ i $y(t)$ iz (*) i (**).

$(II) - 2\cdot(III)$:
$$-3\dot{x} = 7x - 6y + 2\sin t - 2\cos t$$

$$6y = 3\dot{x} + 7x + 2\sin t - 2\cos t$$

Iz (*) imamo da je
$$\dot{x} = -5C_1 e^{-5t} - \frac{1}{3}C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{8}{65}\cos t - \frac{1}{65}\sin t$$

$$3\dot{x} = -15C_1 e^{-5t} - C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{24}{65}\cos t - \frac{3}{65}\sin t$$

$$7x = 7C_1 e^{-5t} + 7C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{56}{65}\sin t + \frac{7}{65}\cos t$$

pa

$$y(t) = \frac{1}{6}\left(-8C_1 e^{-5t} + 6C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{183}{65}\sin t - \frac{99}{65}\cos t\right) = -\frac{4}{3}C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{61}{130}\sin t - \frac{33}{130}\cos t \quad \ldots (**)$$

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} + \dot{y} + x - y = e^t$$
$$\ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} - \dot{y} + x + y = t^2$$

Rj: Napišimo sistem u operator oznakama, gdje je $D = \frac{d}{dt}$

$$(D+1)x + (D-1)y = e^t \quad /(D^2+D+1) \quad \ldots(I)$$
$$(D^2+D+1)x + (D^2-D+1)y = t^2 \quad /(D+1) \quad \ldots(II)$$

$$(D^2+D+1)(D+1)x + (D^2+D+1)(D-1)y = e^t + e^t + e^t$$
$$-\ (D^2+D+1)(D+1)x + (D^2-D+1)(D+1)y = 2t + t^2$$

$$((D^3-1) - (D^3+1))y = 3e^t - 2t - t^2$$
$$-2y = 3e^t - 2t - t^2 \quad /:(-2)$$
$$y = \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}e^t$$

Slično možemo odrediti i x

$(I)\cdot(D^2-D+1)$:
$(II)\cdot(D-1)$:

$$(D+1)(D^2-D+1)x + (D-1)(D^2-D+1)y = e^t - e^t + e^t$$
$$-\ (D-1)(D^2+D+1)x + (D-1)(D^2-D+1)y = 2t - t^2$$

$$((D^3+1) - (D^3-1))x = e^t - 2t + t^2$$
$$2x = t^2 - 2t + e^t$$
$$x = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}e^t$$

Primjetimo da je $\begin{vmatrix} D+1 & D-1 \\ D^2+D+1 & D^2-D+1 \end{vmatrix} = 2$ stepena 0 po D; prema tome proizvoljne konstante se ne pojavljuju u rješenju

(#) Riješiti sistem $\ddot{x} - m^2 y = 0$

$\ddot{y} + m^2 x = 0$.

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama, gdje ćemo staviti $D = \frac{d}{dt}$.

$$D^2 x - m^2 y = 0 \quad / \cdot D^2 \quad \ldots (1)$$
$$D^2 y + m^2 x = 0$$

$$D^4 x - m^2 D^2 y = 0$$
$$D^2 y + m^2 x = 0 \Rightarrow D^2 y = -m^2 x$$

$$D^4 x - m^2(-m^2 x) = 0$$
$$(D^4 + m^4) x = 0$$

ovo je linearna jednačina četvrtog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$\lambda^4 + m^4 = 0$ karak. jedn.

$\lambda^2 = t \Rightarrow t^2 + m^4 = 0$

$b^2 - 4ac = -4m^4, \; t_{1,2} = \frac{0 \pm 2im^2}{2} = \pm i m^2$

$\lambda^2 = \pm i m^2$

$(1-i)(1-i) = 1 - 2i + i^2 = -2i$

Znamo $(1+i)(1+i) = 1 + 2i + i^2 = 2i$

pa je $\frac{m}{\sqrt{2}}(1+i) \cdot \frac{m}{\sqrt{2}}(1+i) = m^2 i$

Prema tome $\lambda_{1,2} = \pm \frac{m}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{m}{\sqrt{2}}(1-i)$

pa je $x(t) = e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}\left(C_1 \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + C_2 \sin \frac{mt}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t}\left(C_3 \cos \frac{mt}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$.

Zamjenjujući $x(t)$ u (1) i rješavajući

$$y(t) = \frac{1}{m^2} D^2 x = e^{\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(C_2 \cos \frac{mt}{\sqrt{2}} - C_1 \sin \frac{mt}{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{-mt}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \sin \frac{mt}{\sqrt{2}} - C_4 \cos \frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$$

(#) Riješiti sistem $\ddot{x} - 3\dot{y} + 4x = 0$

$$3\dot{x} + \ddot{y} + 4y = 0 .$$

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama, gdje je $D = \frac{d}{dt}$.

$$(D^2+4)x - 3Dy = 0 \quad \dots (I) \quad /(D^2+4)$$

$$3Dx + (D^2+4)y = 0 \quad \dots (II) \quad /3D$$

$$(D^2+4)^2 x - 3D(D^2+4)y = 0$$

$$+ \quad 9D^2 x + 3D(D^2+4)y = 0$$

$$\left((D^2+4)^2 + 9D^2\right) x = 0$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina četvrtog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

karakt. jedn. $(\lambda^2+4)^2 + 9\lambda^2 = 0$

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 + 9\lambda^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 4i$$

$$\lambda^4 + 17\lambda^2 + 16 = 0 \qquad \lambda_{3,4} = \pm i$$

$$(\lambda^2+16)(\lambda^2+1) = 0$$

$$x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

Slično, $(I)\cdot(-3D)$: $\quad -3D(D^2+4)x + 9Dy = 0$

$(II)\cdot(D^2+4)$: $\quad + \; 3D(D^2+4)x + (D^2+4)y = 0$

$$(D^2+16)(D^2+1)y = 0$$

pa je

$$y(t) = K_1 \cos 4t + K_2 \sin 4t + K_3 \cos t + K_4 \sin t$$

Da bi se riješili suvišnih rješenja, zamjenimo dobijene $x(t)$ i $y(t)$ u I. Imamo

$$-12 C_1 \cos 4t - 12 C_2 \sin 4t + 3 C_3 \cos t + 3 C_4 \sin t$$
$$+ 12 K_1 \sin 4t - 12 K_2 \cos 4t + 3 K_3 \sin t - 3 K_4 \cos t = 0$$

za sve vrijednosti t; time ... (ZA VJEŽBU)

$$K_1 = C_2, \quad K_2 = -C_1, \quad K_3 = -C_4, \quad K_4 = C_3$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t + C_3 \cos t + C_4 \sin t \\ y(t) = C_2 \cos 4t - C_1 \sin 4t - C_4 \cos t + C_3 \sin t \end{cases}$$

(#) Odrediti opšte rješenje sistema

$$x'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t)$$
$$y'(t) = x(t) + z(t)$$
$$z'(t) = 4x(t) - 4y(t) + 5z(t).$$

Rj: Napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x - x - 2y + z = 0$$
$$-x + \frac{d}{dt}y - z = 0$$
$$-4x + 4y + \frac{d}{dt}z - 5z = 0$$

Ako uvedemo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ sistem postaje

$$(D-1)[x] - 2y + z = 0 \qquad (I)$$
$$-x + Dy - z = 0 \qquad (II)$$
$$-4x + 4y + (D-5)[z] = 0 \qquad (III)$$

Riješimo se z-ta: $\qquad -D+5-4$

$(I)+(II)$: $\quad (D-2)[x] + (D-2)[y] = 0$

$(III)+(II)\cdot(D-5)$: $\quad (-D+1)[x] + (D^2-5D+4)[y] = 0$

$$(D-2)[x] + (D-2)[y] = 0 \qquad /\cdot(D-1)$$
$$-(D-1)[x] + (D-1)(D-4)[y] = 0 \qquad /(D-2) \qquad \ldots(IV)$$

Sad se želimo riješiti x-a.

$$(D-1)(D-2)[x]+(D-1)(D-2)[y]=0$$
$$+\ -(D-1)(D-2)[x]+(D-1)(D-2)(D-4)[y]=0$$

$$(D-1)(D-2)(D-3)[y]=0$$

Ovo je homogena linearna jednačina trećeg reda sa konstantnim koeficijentima. Opšte rješenje je

$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t} \qquad \ldots(*)$$

Sad ako saberemo dvije jednačine iz sistema (N) imamo

$$(D-2-(D-1))[x]+(D-2+\underbrace{(D-1)(D-4)}_{D^2-5D+4})[y]=0$$

$$-x+(D^2-4D+2)[y]=0$$
$$x=y''-4y'+2y$$

Ako u ovu jednačinu stavimo $y(t)$

$$y'=C_1e^t+2C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}$$
$$y''=C_1e^t+4C_2e^{2t}+9C_3e^{t}$$

imamo

$$x(t)=-C_1e^t-2C_2e^{2t}-C_3e^{3t} \qquad \ldots(**)$$

Na kraju, koristeći jednačinu (II), rješenje za $z(t)$ dobijamo

$$z(t)=y'(t)-x(t)$$

i zamjenjujući $x(t)$ i $y(t)$ dobijamo

$$z(t)=2C_1e^t+4C_2e^{2t}+4C_3e^{3t} \qquad \ldots(***)$$

Izrazi za $x(t)$ u (**), $y(t)$ u (*) i $z(t)$ u (***) su opšte rješenje datog sistema (gdje su C_1, C_2 i C_3 proizvoljne konstante).

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} + \dot{y} = 1 - y$$
$$\dot{x} - \dot{z} = 1 - 2x - z$$
$$\dot{y} + \dot{z} = -y - 2z$$

Rj. Prvo napišimo sistem u operator označnja

$$\frac{d}{dt}x + \frac{d}{dt}y + y = 1$$

$$\frac{d}{dt}x + 2x - \frac{d}{dt}z + z = 1$$

$$\frac{d}{dt}y + y + \frac{d}{dt}z + 2z = 0$$

Ako stavimo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ imamo

$$Dx + (D+1)y = 1 \quad \ldots (I)$$
$$(D+2)x - (D-1)z = 1 \quad \ldots (II)$$
$$(D+1)y + (D+2)z = 0 \quad \ldots (III)$$

$(I) - (III):$ $Dx - (D+2)z = 1$ $\quad /(D+2)$

$(II):$ $(D+2)x - (D-1)z = 1$ $\quad /\cdot D$

$(D+2)1 = 0 + 2 = 2$

$$D(D+2)x - (D+2)^2 z = 2$$
$$- \quad D(D+2)x - D(D-1)z = 0$$

$$\left(-(D^2+4D+4) + D^2 - D\right)z = 2$$

$$(-5D-4)z = 2 \quad /\cdot(-1)$$

$(5D+4)z = -2$

ovo je linearna jednačina prvog reda po z-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$z = z_h + z_p$

kar. jedn. $5\lambda + 4 = 0$ $\quad z_h = C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$

$\lambda = -\frac{4}{5}$

$z_p = A$

$\dot{z}_p = 0$ $\quad 4z_p = -2$

$4A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$z(t) = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$

Kako je $\dot{z} = -\frac{4}{5} C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$ zamjenjujući dobijeno z u treću jednačinu sistema $\dot{y} + \dot{z} = -y - 2z$ dobićemo

$$\dot{y} - \frac{4}{5} C_1 e^{-\frac{4}{5}t} = -y + 1 - 2C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$\dot{y} + y = 1 - \frac{6}{5} e^{-\frac{4}{5}t}$$

$(D+1)y = 1 - \frac{6}{5} e^{-\frac{4}{5}t}$

$y = y_h + y_p$

kar. jedn. $\lambda + 1 = 0$

$\lambda = -1 \Rightarrow y_h = C_2 e^{-t}$ $\quad y_p = A + Be^{-\frac{4}{5}t}$

$\dot{y}_p = -\frac{4}{5} B e^{-\frac{4}{5}t}$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y} + y = 1 - \frac{6}{5} e^{-\frac{4}{5}t} \\ y_p + \dot{y}_p = A + \frac{1}{5} B e^{-\frac{4}{5}t} \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \quad B = -6$$

$$y(t) = C_2 e^{-t} + 1 - 6e^{-\frac{4}{5}t}$$

Kako je $\begin{vmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -(D-1) \\ 0 & D+1 & D+2 \end{vmatrix} = -(5D^2+9D+4)$

stepena 2 po D, opšte rješenje će imati samo dvije proizvoljne konstante.

Za sad imamo
$$y(t) = C_2 e^{-t} + 1 - 6e^{-\frac{4}{5}t}$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$$

Ako oduzmemo prve dvije jednačine sistema, imamo
$$\begin{array}{rl} \dot{x} + \dot{y} & = 1 - y \\ -\quad \dot{x} \quad - \dot{z} & = 1 - 2x - z \\ \hline \dot{y} + \dot{z} & = 2x + z - y \end{array}$$

A a kako treća jednačina sistema glasi $\dot{y} + \dot{z} = -y - 2z$ imamo
$$-y - 2z = 2x + z - y$$
$$2x = -3z$$
$$x = -\frac{3}{2}z = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$$

Opšte rješenje sistema je
$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}C_1 e^{-\frac{4}{5}t} \\ y(t) = C_2 e^{-t} + 1 - 6e^{-\frac{4}{5}t} \\ z(t) = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-\frac{4}{5}t} \end{cases}$$

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$(D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1$$
$$Dx + z = 0$$
$$x - Dy - Dz = 0$$

gdje je $D = \frac{d}{dt}$ diferencijalni operator po t. Odrediti partikularno rješenje za koje vrijedi $x = z = 1$, $y = 0$ kada je $t = 0$.

Rj.

$$(D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1$$
$$Dx + z = 0 \qquad / D \cdot (-1)$$
$$x - Dy - Dz = 0 \qquad / \cdot 2$$

$$(D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1$$
$$-D^2 x - Dz = 0$$
$$2x - 2Dy - 2Dz = 0$$

Ako saberemo sve tri zadnje jednačine imamo

$$\left(D^2 + 2D + 1 - D^2 + 2\right) x = 1$$

$$(2D+3)x = 1 \quad \text{lin. jedn. sa konst. koefic.}$$

$$x = x_h + x_p$$

karakt. jedn. $2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda = -\frac{3}{2} \qquad x_h = C_1 e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$x_p = A \qquad 2\dot{x}_p + 3x_p = 1$$

$$\dot{x}_p = 0 \qquad A = \frac{1}{3}$$

$$x(t) = \frac{1}{3} + C_1 e^{-\frac{3}{2}t}$$

Prema drugoj jednačini sistema $z = -Dx = \frac{3}{2} C_1 e^{-\frac{3}{2}t}$

Iz treće jednačine sistema

$$Dy = x - Dz = \frac{1}{3} + C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{9}{4} C_1 e^{-\frac{3}{2}t} = \frac{1}{3} + \frac{13}{4} C_1 e^{-\frac{3}{2}t}$$

Tada je

$$y(t) = \frac{1}{3} t - \frac{13}{6} C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2$$

Kako je

$$\begin{vmatrix} (D+1)^2 & 2D & 3D \\ D & 0 & 1 \\ 1 & -D & -D \end{vmatrix} = 2D^2 + 3D$$

stepena 2 po D,

postoje dvije proizvoljne konstante i opšte rješenje je

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3} + C_1 e^{-\frac{3}{2}t} \\ y(t) = \frac{1}{3} t - \frac{13}{6} C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2 \\ z(t) = \frac{3}{2} C_1 e^{-\frac{3}{2}t} \end{cases}$$

Kada je $t=0$: $\quad x = \frac{1}{3} + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}$

$$y = \left(-\frac{13}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{13}{9}$$

pa traženo partikularno rješenje je

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}t}, \quad y(t) = \frac{1}{3} t - \frac{13}{9} e^{-\frac{3}{2}t}, \quad z(t) = e^{-\frac{3}{2}t}$$

Napomenimo da se partikularno rješenje koje zadovoljava inicijalni skup uslova ne može uvijek odrediti. Na primjer, ne postoji rješenje koje zadovoljava uslov $x=1$, $y=z=0$ kada je $t=0$ zato što $x=1$, $y=0$ je u kontradikciji sa $x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} z$. Slično, $y=0$, $z=1$, $\frac{dx}{dt} = 1$ kada $t=0$ je u kontradikciji sa $\frac{dx}{dt} = -z$.

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = 3x - y + z$$
$$\dot{y} = -x + 5y - z$$
$$\dot{z} = x - y + 3z$$

Rj: Ovaj sistem ćemo riješiti na drugačiji način nego što smo rješavali prethodne zadatke, čisto da pokažemo još jedan način za rješavanje sistema.

$$\dot{x} = 3x - y + z \quad \ldots (I)$$
$$\dot{y} = -x + 5y - z \quad \ldots (II)$$
$$\dot{z} = x - y + 3z \quad \ldots (III)$$

Iz (I) imamo

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - \dot{y} + \dot{z} \quad \ldots (IV)$$

Uvrstimo sad (I), (II), (III) u (IV)

$$\ddot{x} = 3(3x - y + z) - (-x + 5y - z) + (x - y + 3z)$$
$$\ddot{x} = 11x - 9y + 7z \quad \ldots (V)$$

Sad iz (V)

$$\dddot{x} = 11\dot{x} - 9\dot{y} + 7\dot{z} \quad \ldots (VI)$$

Uvrstimo (I), (II) i (III) u (VI)

$$\dddot{x} = 11(3x - y + z) - 9(-x + 5y - z) + 7(x - y + 3z)$$

$$\dddot{x} = 49x - 63y + 41z \quad \ldots (VII)$$

Sljedeći sistem je ekvivalentan datom sistemu

$$\dot{x} = 3x - y + z \quad \dots(\text{VIII})$$

$$\ddot{x} = 11x - 9y + 7z \quad \dots(\text{IX})$$

$$\dddot{x} = 49x - 63y + 41z \quad \dots(\text{X})$$

Izrazimo y i z preko x, $\dot{x}$ i $\ddot{x}$

$$y - z = 3x - \dot{x} \quad /\cdot(-7)$$
$$9y - 7z = 11x - \ddot{x}$$

$$-7y + 7z = -21x + 7\dot{x}$$
$$+ \quad 9y - 7z = 11x - \ddot{x}$$

$$2y = -10x - \ddot{x} + 7\dot{x}$$

$$y = -\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{7}{2}\dot{x} - 5x$$

$$y - z = 3x - \dot{x} \quad /\cdot(-9)$$
$$9y - 7z = 11x - \ddot{x}$$

$$-9y + 9z = -27x + 9\dot{x}$$
$$+ \quad 9y - 7z = 11x - \ddot{x}$$

$$2z = -16x + 9\dot{x} - \ddot{x}$$

$$z = -\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{9}{2}\dot{x} - 8x$$

Sad uvrstimo dobijene izraze za y i z u (X)

$$\dddot{x} = 49x - 63\left(-\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{7}{2}\dot{x} - 5x\right) + 41\left(-\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{9}{2}\dot{x} - 8x\right)$$

$$= 36x + 11\ddot{x} - 36\dot{x}$$

Dobili smo $\quad \dddot{x} - 11\ddot{x} + 36\dot{x} - 36x = 0$

ovo je linearna jednačina trećeg reda po x sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

karak. jedn. $\quad \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$

$\lambda = 1: \quad 1 - 11 + 36 - 36 \neq 0, \qquad \lambda = 2: \quad 8 - 44 + 72 - 36 = 0$

Zadaci za vježbu

Riješiti sljedeće sisteme diferencijalnih jednačina.

RJEŠENJA:

a)
$$\dot{x} - \dot{y} + y = -e^{t}$$
$$x + \dot{y} - y = e^{2t}$$

b)
$$\dot{x} + \dot{y} + 2x + y = t$$
$$\dot{y} + 5x + 3y = t^2$$

c)
$$\dot{x} + 2\dot{y} + x + 7y = e^{t} + 2$$
$$\dot{y} - 2x + 3y = e^{t} - 1$$

d)
$$\dot{x} + \dot{y} - x + 3y = e^{-t} - 1$$
$$\dot{x} + \dot{y} + 2x + y = e^{2t} + t$$

e)
$$\ddot{x} - 6\dot{y} + 16x = 0$$
$$6\dot{x} + \ddot{y} + 16y = 0$$

f)
$$x''(z) + 4x(z) + y(z) = \sin^2 z$$
$$y''(z) + y(z) - 2x(z) = \cos^2 z$$

g)
$$\ddot{x} + \dot{x} + x + \ddot{y} + y = e^{t}$$
$$\ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} = e^{-t}$$

h)
$$\dot{x} - x + \dot{y} + 2y = 1 + e^{t}$$
$$\dot{y} + 2y + \dot{z} + z = 2 + e^{t}$$
$$\dot{x} - x + \dot{z} + z = 3 + e^{t}$$

RJEŠENJA:

a)
$$x = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \frac{3}{5}e^{2t}$$
$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{t}$$

b)
$$x = \frac{C_1 - 3C_2}{5}\sin t - \frac{3C_1 + C_2}{5}\cos t - t^2 + t + 3$$
$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 - 3t - 4$$

c)
$$x = \frac{1}{2}C_1 e^{-4t}\left(\cos(t + C_2) - \sin(t + C_2)\right) - \frac{5e^{t}}{26} + \frac{13}{17}$$
$$y = C_1 e^{-4t}\sin(t + C_2) + \frac{2e^{t}}{13} + \frac{3}{17}$$

d)
$$x(t) = 2C_1 e^{-\frac{7t}{5}} + \frac{5}{17}e^{2t} + \frac{3}{7}t - \frac{1}{49}$$
$$y(t) = 3C_1 e^{-\frac{7t}{5}} - \frac{1}{17}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{7}t - \frac{26}{49}$$

e)
$$x(t) = C_1\cos 2t - C_2 \sin 2t + C_3 \cos 8t + C_4 \sin 8t$$
$$y(t) = C_2 \cos 2t + C_1 \sin 2t + C_4 \cos 8t - C_3 \sin 8t$$

f)
$$x(z) = C_1 \cos(\sqrt{2}z + C_2) + C_3 \cos(\sqrt{3}z + C_4) + \frac{1}{2}\cos 2z$$
$$y(z) = -2C_1 \cos(\sqrt{2}z + C_2) - C_3 \cos(\sqrt{3}z + C_4) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$$

g)
$$x(t) = -e^{t} - 2e^{-t} - C_1$$
$$y(t) = 2e^{t} + e^{-t} + C_1$$

h)
$$x(t) = -1 + te^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{t}$$
$$y(t) = \frac{1}{6}e^{t} + C_1 e^{-2t}$$
$$z(t) = 2 + \frac{1}{4}e^{t} + C_3 e^{-t}$$